LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 14

Pad, rast, lokalni ekstremi, konveksnost, konkavnost, točke infleksije i njihovo fizikalno značenje

Lekcije iz Matematike 1.

14. Pad, rast, lokalni ekstremi, konveksnost, konkavnost, točke infleksije i njihovo fizikalno značenje.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se daju **kriteriji pomoću derivacija** za rast i pad funkcije, lokalne ekstreme (točke prijelaza iz rasta u pad i obratno), konveksnost i konkavnost, točke infleksije (točke prijelaza iz konveksnosti u konkavnost i obratno). Ti su kriteriji prirodni, jer derivacije imaju jasna fizikalna značenja: prva derivacija značenje brzine, a druga značenje ubrzanja.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Osnovna pitanja koja se mogu postaviti o ponašanju neke funkcije jesu:
1. Raste li ili pada funkcija oko neke vrijednosti argumenta?
2. Postiže li funkcija svoju najveću ili najmanju vrijednost za neku vrijednost argumenta?
3. Je li funkcija konveksna ili konkavna oko neke vrijednosti argumenta?
4. Ima li funkcija infleksiju za neku vrijednost argumenta (tj. mijenja li konveksnost i konkavnost pri prolazu argumenta kroz tu vrijednost)?

U svim ovim pitanjima govorimo o ponašanju funkcije **oko neke vrijednosti argumenta**, recimo x_0, što znači "malo lijevo, malo desno" od x_0. To znači da trebamo odgovoriti na pitanje za beskonačno mnogo vrijednosti argumenta, što je nemoguće ako to bukvalno shvatimo. Matematički se taj problem rješava tako da se gledaju vrijednosti samo u x_0, ali ne samo vrijednosti funkcije već i vrijednosti njenih derivacija u x_0. U **većini slučajeva**, gornja četiri problema riješit ćemo **samo iz poznavanja vrijednosti prve i druge derivacije funkcije u x_0**.
Općenito, četiri gornja problema svode se na rješavanje jednadžba i nejednažba.

Ova četiri pitanja o funkcijama imaju veliku važnost u inženjerstvu pri proučavanju, praćenju i opisivanju veze medju dvjema veličinama u nekom procesu, reakciji. Na primjer ako razmatramo vrijednost neke veličine y nastale u nekom procesu, u ovisnosti o vremenu t, onda ova pitanja imaju sljedeću interpretaciju:
1. Povećava li se ili smanjuje vrijednost veličine y u nekom vremenskom intervalu oko trenutka t_0?

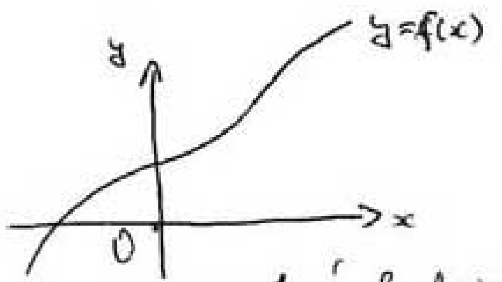
2. Je li vrijednost veličine y maksimalna ili minimalna u nekom trenutku t_0?
3. Raste li ubrzano ili usporeno vrijednost veličine y, u nekom vremenskom intervalu oko t_0 (ako raste, i slično pitanje ako vrijednost od y pada) ?
4. Prelazi li promjena veličine y u nekom trenutku od ubrzanja na usporenje i obratno?

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam i interpretaciju derivacije funkcija (naročito prvu i drugu). Takodjer je važna jasna predožba o ponašanju kvadratne funkcije.

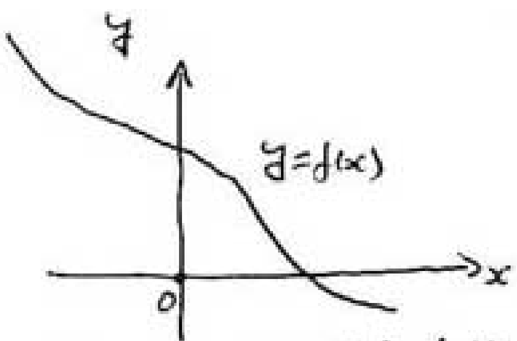
Ponovimo potrebne definicije i činjenice:

1. Rast i pad funkcije.
Kažemo da je funkcija rastuća ako se s povećavanjem vrijednosti argumenta povećavaju i vrijednosti funkcije.
Geometrijski, to znači da se graf funkcije, gledajući od lijeva na desno, uspinje (raste) (sl.1.).



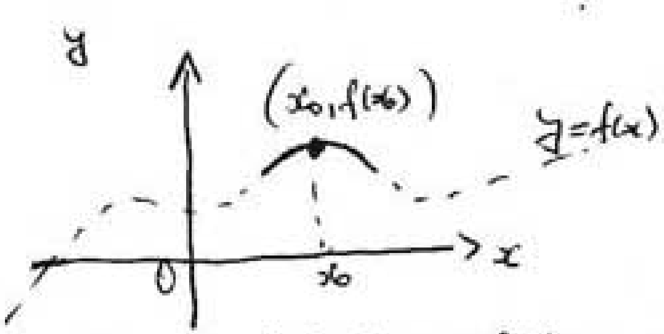
Graf rastuće funkcije
Sl. 1.

Kažemo da je funkcija padajuća ako se s povećavanjem vrijednosti argumenta vrijednosti funkcije smanjuju.
Geometrijski, to znači da se graf funkcije, gledajući od lijeva na desno, spušta (pada) (sl.2.).



Graf padajuće funkcije
Sl. 2.

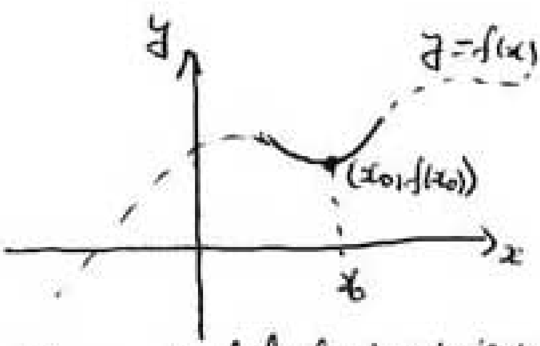
2. Lokalni ekstremi funkcije - lokalni maksimum, lokalni minimum. Kažemo da je x_0 točka lokalnog maksimuma funkcije f (ili da f u x_0 postiže lokalni maksimum) ako je $f(x_0)$ najveća vrijednost funkcije f na nekom (otvorenom) intervalu oko x_0 (tj. malo lijevo, malo desno od x_0). Ako je tako onda se $f(x_0)$ zove lokalni maksimum. Netko tada i točku $(x_0, f(x_0))$ zove točkom lokalnog maksimuma (sl.3.).



U x_0 je lokalni maksimum

Sl.3.

Kažemo da je x_0 točka lokalnog minimuma funkcije f (ili da f u x_0 postiže lokalni minimum) ako je $f(x_0)$ najmanja vrijednost funkcije f na nekom (otvorenom) intervalu oko x_0 (tj. malo lijevo, malo desno od x_0). Ako je tako onda se $f(x_0)$ zove lokalni minimum. Netko tada i točku $(x_0, f(x_0))$ zove točkom lokalnog minimuma (sl.4.).

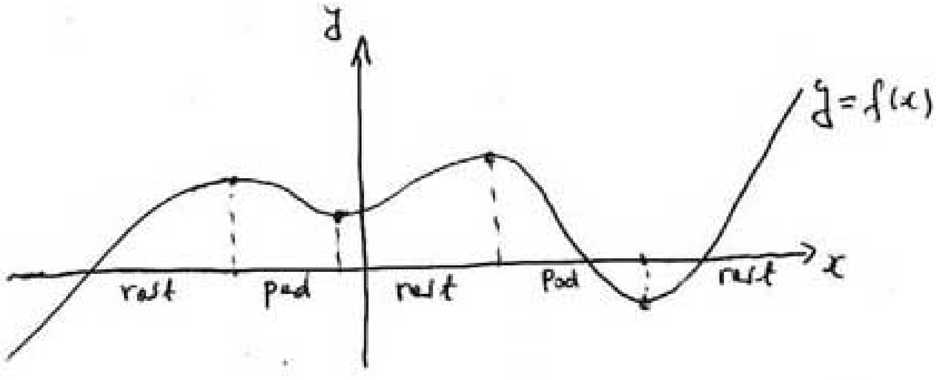


U x_0 je lokalni minimum

Sl.4.

Kažemo da je x_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f (ili da f u x_0 ima lokalni ekstrem) ako je x_0 točka lokalnog maksimuma ili lokalnog minimuma funkcije f.

3. Interval rasta (pada) funkcije f je svaki interval unutar domene funkcije na kojemu funkcije raste (pada) (sl.5.).

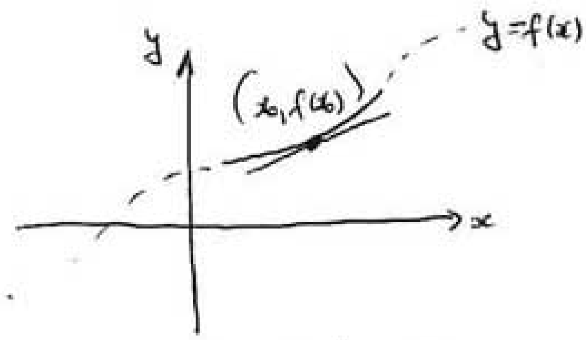


Sl.5. (intervali rasta i pada)

4. Važna interpretacija lokalnih ekstrema pomoću intervala (područja) rasta odnosno pada.
Funkcija f postiže lokalni maksimum u x_0 ako, pri prolazu argumenta kroz x_0, funkcija iz područja rasta prelazi u područje pada (tj. ako malo lijevo od x_0 funkcija raste, a malo desno, pada).

Funkcija f postiže lokalni minimum u x_0 ako, pri prolazu argumenta kroz x_0, funkcija iz područja pada prelazi u područje rasta (tj. ako malo lijevo od x_0 funkcija pada, a malo desno, raste).

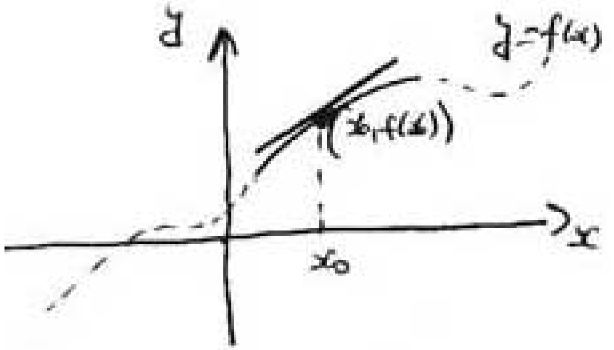
5. Konveksnost i konkavnost funkcije.
Kažemo da je f konveksna u x_0 ako je tangenta na graf u točki $(x_0, f(x_0))$ ispod grafa (potpuno ili na jednom dijelu oko te točke) (sl.6.).



Sl.6 (f je konveksna oko x0)

To je geometrijska definicija, postoji i analitička, ali je tu nećemo spominjati. Kažemo da je funkcija konveksna na nekom intervalu ako je ona konveksna u svakoj točki tog intervala.

Kažemo da je f konkavna u x_0 ako je tangenta na graf u točki $(x_0, f(x_0))$ iznad grafa (potpuno ili na jednom dijelu oko te točke) (sl.7.).



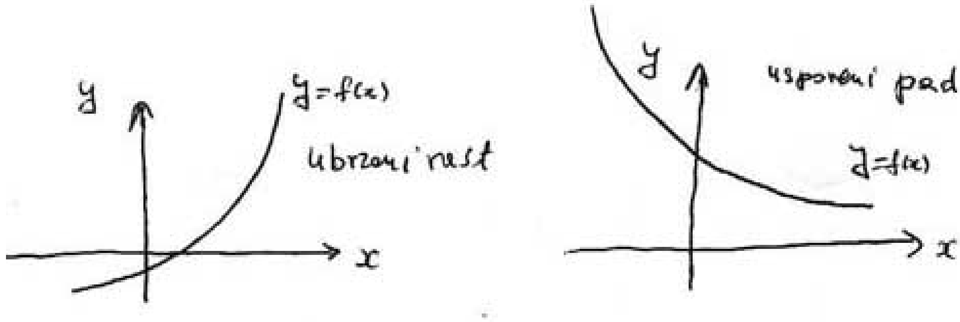
Sl.7. (f je konkavna oko x_0)

To je geometrijska definicija, postoji i analitička, ali je tu nećemo spominjati.
Kažemo da je funkcija konkavna na nekom intervalu ako je ona konkavna u svakoj točki tog intervala.

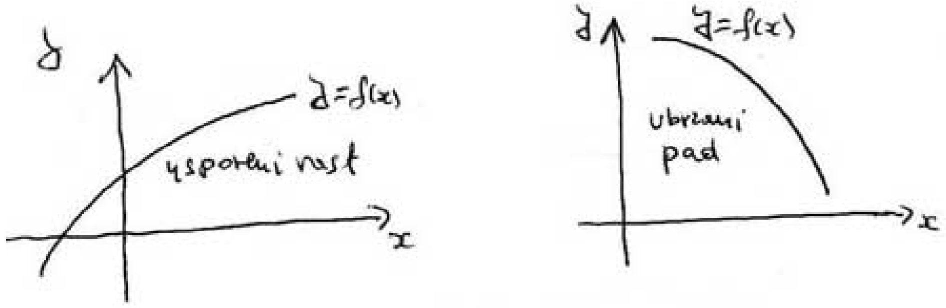
7. Važna interpretacija konveksnosti odnosno konkavnosti pomoću rasta odnosno pada funkcije.
Funkcija f je konveksna ako ubrzano raste ili usporeno pada.
Funkcija f je konkavna ako usporeno raste ili ubrzano pada. (sl.8.).

8. Točke infleksije.
Kažemo da je x_0 točka infleksije funkcije f ako pri prolazu argumenta kroz x_0, funkcija prelazi iz područja konveksnosti u područje konkavnosti ili obratno. Ako je tako, onda se točka $(x_0, f(x_0))$ zove točka infleksije grafa. (sl.9).

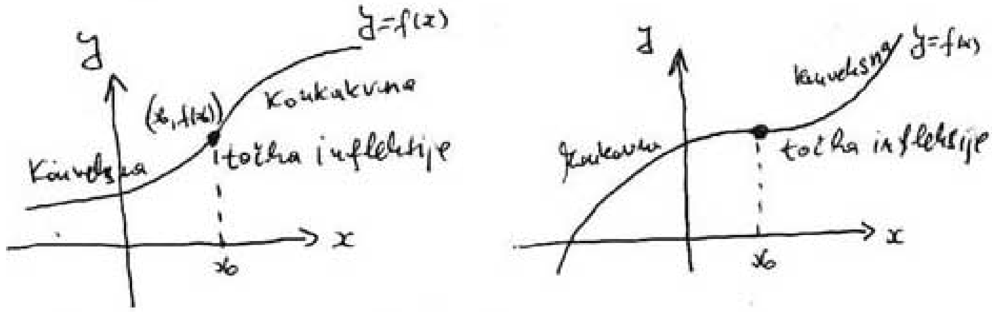
Kritične točke.
Kažemo da je x_0 **kritična točka** ako je ona točka lokalnog ekstrema ili točka infleksije.
Naziv ima jasno fizikalno značenje: u kritičnim točkama dolazi do **bitnih promjena** u nekom procesu (primjerice, ako se neka veličina u procesu povećavala, nakon kritične točke počinje se smanjivati, odnosno ako se ubrzano povećavala, počinje usporavati).



Sl. 8(i) (konveksna funkcija)



Sl. (8ii) (konkavna funkcija)

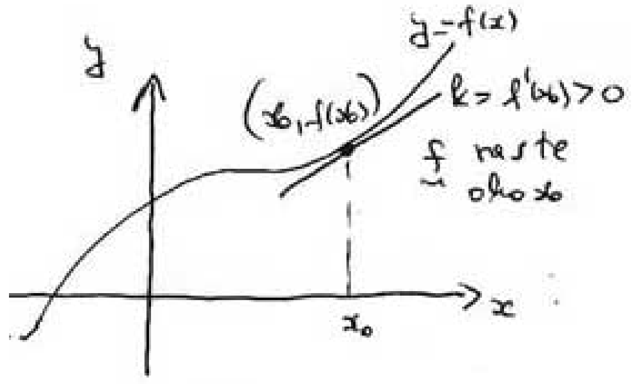


Sl. 9.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Kriteriji rasta i pada.

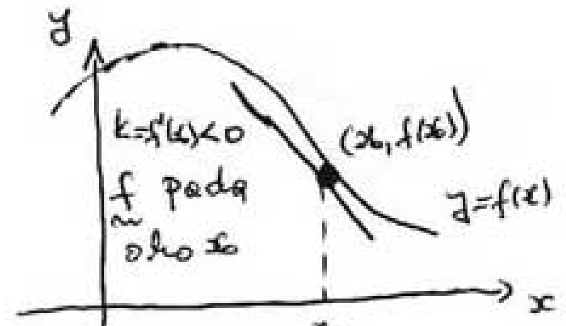
Ako je $f'(x_0) > 0$, onda f raste oko x_0 (sl.10.).



Sl. 10

Objašnjenje. Postoji i strog, analitički dokaz te tvrdnje, a mi ovdje dajemo geometrijsko objašnjenje:
1. $f'(x_0)$ je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u $(x_0, f(x_0))$. Zato,
2. Ako je $f'(x_0) > 0$ onda je prikloni kut tangente šiljast, tj. tangenta je rastuća.
Zaključak: funkcije f je rastuća oko x_0.

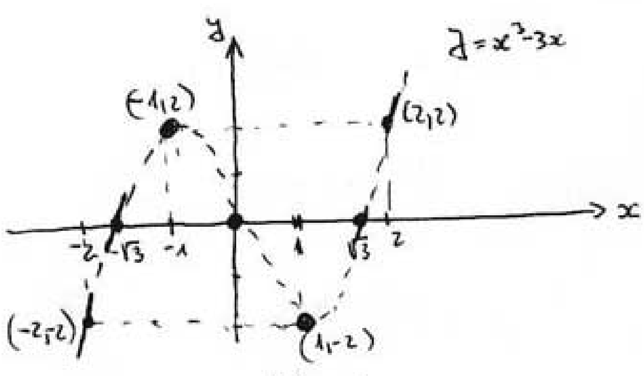
Ako je $f'(x_0) < 0$, onda f pada oko x_0. (sl.11.). Objašnjenje je analogno onome za rast, samo što je tu prikloni kut tangente tup.



Sl. 11.

Primjer 1. - primjena kriterija rasta i pada. Odredimo intervale rasta i pada, i lokalne ekstreme funkcije $f(x) := x^3 - 3x$, te skicirajmo graf.

Iako to nije nužno, najprije odredimo nekoliko točaka grafa, da bismo dobili neku predožbu o funkciji.
Podjimo od točaka u kojima graf siječe x-os,
tj. odredimo **nultočke** funkcije f,
tj. riješimo jednadžbu $x^3 - 3x = 0$.
$x(x^2 - 3) = 0$
pa su rješenja $x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{3}$.
Ucrtavanjem još nekoliko točaka, dobivamo **grubu predodžbu** o grafu funkcije f (sl.12.).



x	x^3-3x
-2	-2
$-\sqrt{3}$	0
-1	2
0	0
1	-2
$\sqrt{3}$	0
2	2

sl. 12.

Uočavamo da bi f trebala imati točku lokalnog maksimuma x_{max} negdje izmedju $-\sqrt{3}$ i 0, i točku lokalnog minimuma x_{min} negdje izmedju 0 i $-\sqrt{3}$. Treba odrediti točno x_{max} i x_{min}.

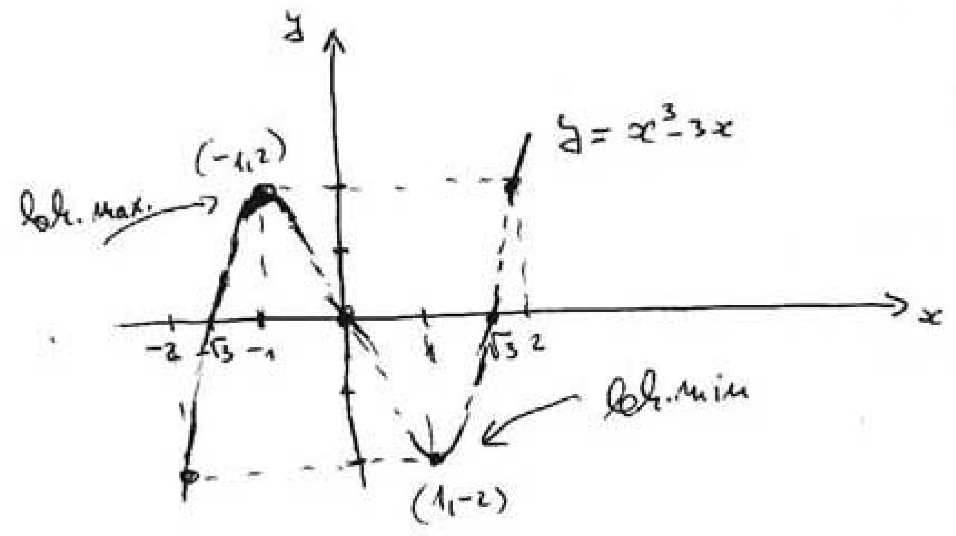
Tu je $f'(x) = 3x^2 - 3$. Odredimo područja pada i rasta; podjimo od područja pada (jer je tu tako jednostavnije, ali mogli smo poći i od područja rasta):
$f'(x) < 0$
$3x^2 - 3 < 0$
$x^2 < 1$
$-1 < x < 1$.
Zaključujemo:
1. Funkcija pada za $-1 < x < 1$, tj, $< -1, 1 >$ je interval pada.
2. Funkcija raste za $x < -1$ i za $x > 1$, tj. $< -\infty, -1 >$ i $< 1, +\infty >$ su intervali rasta (uočimo da smo ta dva intervala dobili izravno, kao komplementarne otvorene intervale, intervalu pada).
3. (i) U $x = -1$ funkcija prelazi iz područja rasta u područje pada, pa je $x_{max} = -1$. Kako je $f(-1) = 2$, točka $(-1, 2)$ je točka lokalnog maksimuma grafa. To se obično zapisuje kao:

$$(x_{max}, y_{max}) = (-1, 2)$$

(ii) U $x = 1$ funkcija prelazi iz područja pada u područje rasta, pa je $x_{min} = 1$. Kako je $f(1) = -2$, točka $(1, -2)$ je točka lokalnog minimuma grafa. To se obično zapisuje kao:

$$(x_{min}, y_{min}) = (1, -2)$$

Sad možemo malo preciznije skicirati graf funkcije (sl.13.).



Sl. 13.

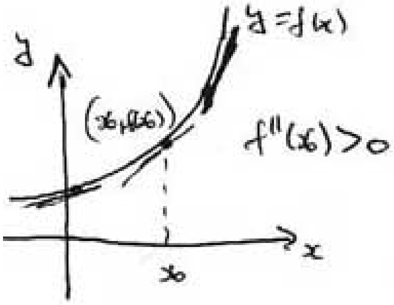
Napomenimo da još ne možemo biti zadovoljni jer još uvijek neznamo točno područja konveksnosti i konkavnosti, odnosno točke infleksije (iako ih naziremo otprilike).
Napomenimo takodjer, da smo područja rasta i pada te lokalne ekstreme mogli odrediti bez ikakva crtanja, dovoljno je bilo riješiti nejednadžbu $f'(x) < 0$ (ili $f'(x) > 0$).

Kriteriji konveksnosti i konkavnosti.

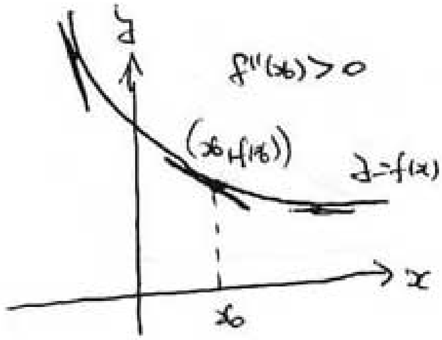
Ako je $f''(x_0) > 0$, onda je f konveksna oko x_0.
Obrazloženje. Iako postoji i strogi analitički dokaz, dat ćemo geometrijsko obrazloženje (**geometrijska interpretacija druge derivacije**):
1. Ako je $f''(x_0) > 0$ onda derivacija f' raste oko x_0 (zbog kriterija rasta i zbog toga što je $f'' = (f')'$). Mogu nastupiti sljedeće mogućnosti:
(i) f raste oko x_0, pa zato ubrzano raste (jer joj se derivacija povećava), pa je konveksna (sl.14(i)).
(ii) f pada oko x_0, pa zato usporeno pada, pa je konveksna (sl.14(ii)).
(iii) f ima lokalni ekstrem u x_0, pa zato taj ekstrem mora biti minimum, pa je f opet konveksna. (sl.15.).
Dakle, ako je $f''(x_0) > 0$, f je konveksna oko x_0.

Ako je $f''(x_0) < 0$, onda je f konkavna oko x_0 (sl.16.).

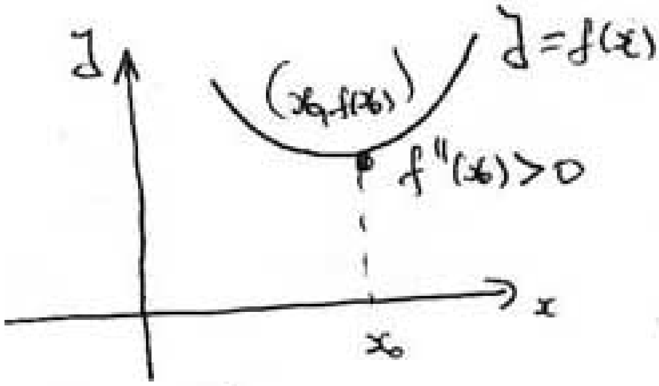
Obrazloženje. Analogno onome za konveksnost.



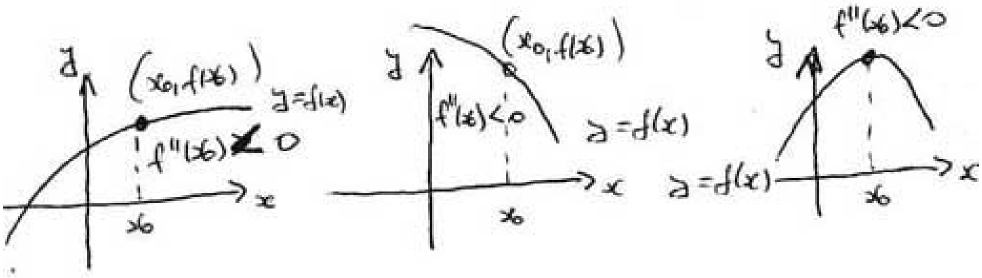
Sl. 14(i)



Sl. 14(ii)



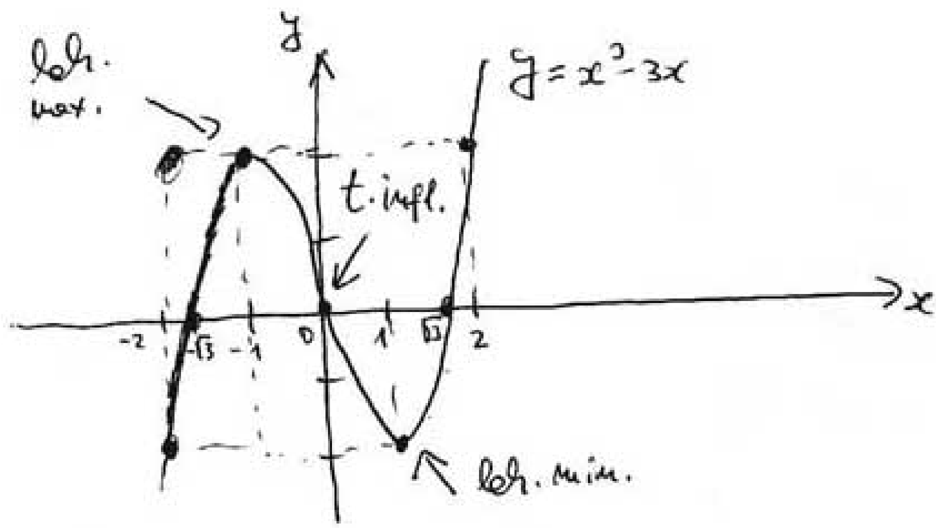
Sl. 15



Sl. 16.

Primjer 2. - Primjena kriterija konveksnosti i konkavnosti.
Skicirajmo graf funkcije $f(x) := x^3 - 3x$.

Već smo u Primjeru 1. odredili nultočke, intervale rasta i pada i lokalne ekstreme. Ostaje odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije.
Tu je $f(x) := x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. Dakle:
$f''(x) > 0$
$6x > 0$
$x > 0$. Zato:
1. f je konveksna za $x > 0$
2. f je konkavna za $x < 0$
3. U $x_0 = 0$ je točka infleksije, jer u toj točki f prelazi iz područja konkavnost u područje konveksnosti.
Sad možemo puno preciznije skicirati graf (sl.17).

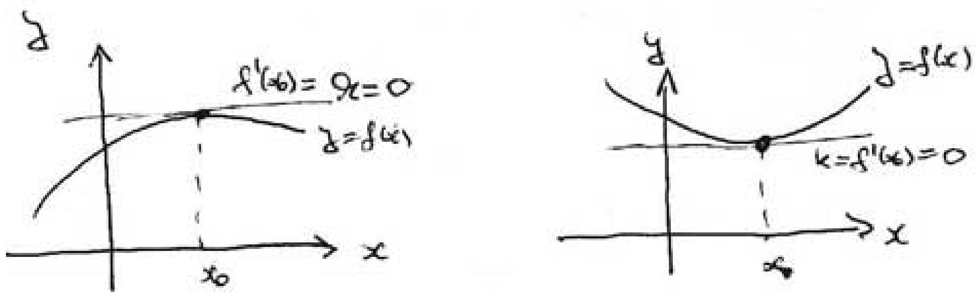


Sl. 17.

Izravni kriteriji lokalnog ekstrema.

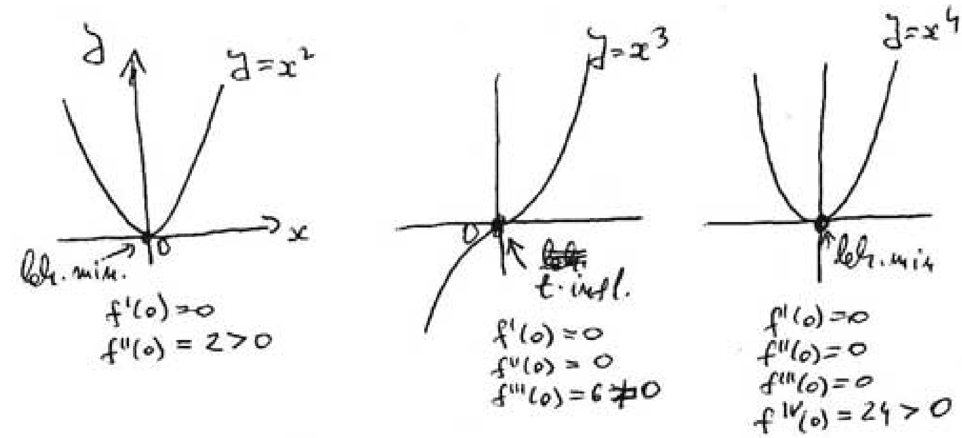
1. Nužni uvjet lokalnog ekstrema.
Ako je u x_0 lokalni ekstrem onda je $f'(x_0) = 0$, tj. tangenta u točki $(x_0, f(x_0))$ usporedna je s x-osi. (sl. 18.).

Obrazloženje. Postoji i strog analitički dokaz, a geometrijsko je obrazloženje očito.



Sl. 18.

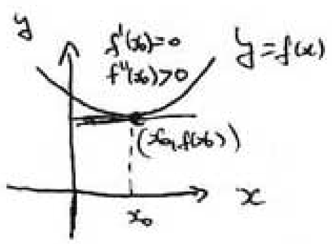
Važna napomena. Uvjet $f'(x_0) = 0$ je nužan, ali općenito, ne i dovoljan da bi x_0 bio lokalni ekstrem. To u praksi znači, da ako želimo odrediti sve lokalne ekstreme neke funkcije, jedan od pristupa jest da riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Tada su lokalni ekstremi medju rješenjima te jednadžbe, ali može se dogoditi da neka rješenja ne budu lokalni ekstremi već točke infleksije.
To jasno vidimo na primjerima potencija $f(x) = x^n$ i činjenice da parne potencije u $x_0 = 0$ imaju minimum, a neparne (osim za eksponent 1) imaju tu točku infleksije (sl.19.). Uočimo da je uvijek (za $n > 1$) $f'(0) = 0$).



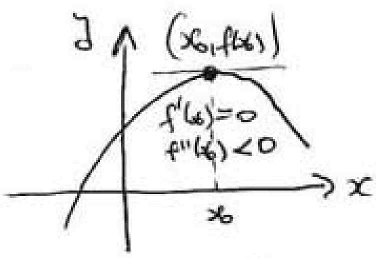
Sl. 19.

Dovoljni uvjeti lokalnog ekstrema.
(i). Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, onda je u x_0 lokalni minimum.
(ii) Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, onda je u x_0 lokalni maksimum.

Obrazloženje. Iako postoji i strog analitički dokaz, mi dajemo geometrijsko obrazloženje (sl. 20.).



Sl. 20(i) Lokalni minimum



Sl. 20(ii) lokalni maksimum

Primjer 3. - primjena kriterija nužnog i dovoljnog uvjeta lokalnog ekstrema
Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 3x$.

Napomenimo da smo već u Primjeru 1. pokazali, primjenom kriterija rasta i pada, da je $x_{max} = -1$ i $x_{min} = 1$. Sad ćemo to dobiti izravno iz kriterija lokalnog ekstrema.
Tu je $f(x) := x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$.
1. Nužan uvjet lokalnog ekstrema: $f'(x) = 0$.
$3x^2 - 3 = 0$
$x_1 = -1,\ x_2 = 1$
2. Dovoljan uvjet lokalnog ekstrema:
$f''(x_1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$ pa je u $x = -1$ lokalni maksimum.
$f''(x_2) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$ pa je u $x = 1$ lokalni maksimum.

Poopćenje kriterija lokalnog ekstrema
Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$ onda je:
(i) ako je $f'''(x_0) \neq 0$, onda je u x_0 točka infleksije.
(ii) ako je i $f'''(x_0) = 0$ onda je:
(a) ako je $f^{iv}(x_0) < 0$, onda je u x_0 lokalni maksimum
(b) ako je $f^{iv}(x_0) > 0$, onda je u x_0 lokalni miniimum
(c) ako je $f^{iv}(x_0) = 0$, onda analogno treba gledati petu, odnosno šestu derivaciju itd.

Primjer 4. - Primjena popćenog kriterija.
Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^5 - 5x^3$.

Tu je $f'(x) = 5x^4 - 15x^2$, $f''(x) = 20x^3 - 30x$, $f'''(x) = 60x^2 - 30$.
1. $f'(x) = 0$
$5x^4 - 5x^2 = 0$
$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$
Tu su mogući lokalni ekstremi:

2. (i) $f''(x_1) = 20(-1)^3 - 30(-1) = 10 > 0$ pa je u $x = -1$ lokalni minimum.
(ii) 2. $f''(x_2) = 20 \cdot 0^3 - 30 \cdot 0 = 0$ pa treba nastaviti s višim derivacijama:
$f'''(x_2) = 60 \cdot 0^2 - 30 = -30 \neq 0$ pa je u $x = 0$ točka infleksije.

(iii) $f''(x_3) = 20 \cdot 1^3 - 30 \cdot 1 = -10 < 0$ pa je u $x = 1$ lokalni maksimum.

Fizikalna značenja lokalnih ekstrema, druge derivacije i točaka infleksije.

Funkcijskom vezom $y = f(x)$ opisano je kako se mijenja druga veličina y u ovisnosti o promjeni prve veličine x. Zato:

1. $f'(x)$ je brzina kojom se mijenja y pri vrijednosti x prve veličine.

2. U lokalnim ekstremima brzina je jednaka nuli.

3. $f''(x)$ je akceleracija promjene druge veličine pri vrijednosti x prve veličine (to je zato što je $f'' = (f')'$, tj. f'' je brzina promjene brzine.

4. U točkama infleksije ubrzanje prelazi u usporenje i obratno.